

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΥ ΚΥΚΛΟΥ**

Σχ. Έτος 2016 – 2017

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

A2. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A3. Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μία συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε υποχρεωτικά δεν είναι και 1-1 σε αυτό

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = m \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ τότε υποχρεωτικά υπάρχει και το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

γ) Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[a, \beta]$ ισχύει $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$ και f' συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε η f δεν έχει ακρότατα

δ) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$. Τότε ισχύει η ισοδυναμία :

$$\int_a^\beta f(x) dx = 0 \Leftrightarrow a = \beta$$

ε) Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx > 0$

Μονάδες 10**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{|x| - 3}}$.

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A , της f

Μονάδες 6

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τις ασύμπτωτες

Μονάδες 9

B3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_7^{12} f(x) dx$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x-2} - \ln x - x$, $x > 0$.

Γ1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f **Μονάδες 6**

Γ2. Έστω επιπλέον η συνάρτηση $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$e^{\varphi(x)}(f^2(x) + 2f(x) + 1) = 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

α) Να βρείτε τα ακρότατα της φ **Μονάδες 7**

β) Θεωρώντας δεδομένο ότι $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$, να δείξετε ότι

$$\varphi(x) \geq -2f(x) \text{ για κάθε } x > 0. \quad \textbf{Μονάδες 6}$$

γ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\eta\mu f(x) - f^2(x)}{f(x)} \cdot \left(e^{\int_1^2 \varphi(x) dx + 2 \int_1^2 f(x) dx} - 1 \right) \right]$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \ln x}{x}$, $x > 0$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα **Μονάδες 5**

Δ2. Να βρείτε την ασύμπτωτη (ε) της γραφικής παράστασης C_f της f στο $+\infty$

Μονάδες 4

Δ3. Ένα υλικό σημείο $M(x(t), y(t))$, $t \geq 0$, ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από το σημείο $A(1, f(1))$ και κινείται πάνω στην καμπύλη $y=f(x)$, με $x > 1$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M απέχει από την ευθεία (ε) του **Δ2**) ερωτήματος τη μέγιστη απόσταση, να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $x(t)$ του M ισούται με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, $y(t)$.

(Δίνεται ότι η απόσταση σημείου $M(x_0, y_0)$ από ευθεία (ζ) : $Ax + By + \Gamma = 0$

$$\text{προκύπτει από τον τύπο } d(M, \zeta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \textbf{Μονάδες 8}$$

Δ4. Αν $E=1$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της f , την ασύμπτωτη (ε) του **Δ2**) ερωτήματος και την ευθεία $x=\alpha$, $\alpha > 1$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha - 1$ **Μονάδες 8**

Αθήνα 27 Απριλίου 2017

Η ομάδα των Μαθηματικών του 39^{ου} ΓΕΛ Αθηνών